Проблема структуры универсальной логики[1]

В.Л. Васюков

ABSTRACT. The subject of the inquiry is the nature and the structure of the general universe of possible combinations of logical systems. Some categorical constructions are introduced which along with the coproducts underlying the fibring of logics describe the inner structure of the category of logical systems. It is shown that categorically the universe of universal logic turns out to be a paraconsistent complement topos.

Введение

Интерес к комбинированию логических систем в последнее время привел к публикации множества статей, посвященных этому вопросу (см. [3, 13, 14, 19, 20]). Многочисленные исследования в этой области используют*расслоение* — самый общий механизм комбинирования логических систем, предложенный Д. Габбаем [10]. Расслоение может применяться не только к модальным системам, но и в случае основных логических систем. Область этих логик достаточно богата, чтобы проиллюстрировать наиболее интересные свойства расслоения и снабдить нас базисом для комбинаций логических систем начиная от интуиционистских и заканчивая многозначными логиками (включая в себя модальные системы в качестве частного случая) [4, 8, 10, 17, 21].

В области основных логических систем конструирование расслоения не вызывает особых затруднений. Более интересным случаем было бы, по-видимому, исследование природы и структуры общего универсума возможных комбинаций всех логических систем. И здесь на помощь приходит концепция *универсальной логики* (см. [5, 6]), позволяющая выдвинуть гипотезу относительно структуры подобного универсума. Универсальная

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 06-03-00195а.

логика представляет собой общую теорию логик, рассматриваемых как особая разновидность математических структур, по аналогии с тем, как универсальная алгебра рассматривает конкретные алгебраические системы. Переходя на точку зрения универсальной логики, нетрудно прийти к заключению, что теоретико-категорный подход, когда логические системы объединяются в категорию специального вида, снабжает нас некоторым фундаментом для исследования универсума универсальной логики. В статье эта проблема решается путем введения категорных конструкций, которые наряду с копроизведениями, лежащими в основе расслоения логик, описывают внутреннюю структуру категории логических систем. Главной целью является демонстрация того факта, что универсум универсальной логики оказывается *паранепротиворечивым дополняющим топосом.*

Во втором параграфе формулируется понятие категории **Log** логических систем, которая будет использоваться в качестве основного инструмента на всем протяжении исследования.

В третьем параграфе рассматриваются *копроизведения* в **Log**, чья конструкция лежит в основании техники расслоения логических систем. Показано, что *неограниченные расслоения* являются, по сути дела, копроизведениями в **Log**.

Действуя дуально предыдущему случаю копроизведений, в четвертом параграфе вводится понятие *произведений*, специальный случай требуемой нам конструкции расслоенного произведения, и понятие уравнителя (с точностью до изоморфизма). Показывается, что *неограниченные индексирования* представляют собой произведения в **Log**. Приводятся некоторые примеры логических систем, являющиеся произведениями.

В пятом параграфе рассматривается конструкция *коэкспоненциала*, дуального обычному экспоненциалу в декартовых категориях. Вводится понятие *возможной переводимости*, основанное на технике семантики возможной переводимости, и показывается, что возможные переводимости представляют собой коэкспоненциалы в **Log**. В качестве примера подобного подхода рассматривается возможная переводимость трехзначной логики $\mathbf{P^1}$ в классическую логику.

Наконец, путем использования понятия *дополняющего классификатора*, разработанного К. Мортенсеном, показывается, что

Log является *дополняющим топосом*, т.е. декартовой козамкнутой категорией с дополняющим классификатором подобъектов. Поскольку, согласно Мортенсену, дополняющий топос соответствует паранепротиворечивой логике, основывающейся на брауэровой алгебре, так же как обычный топос соответствует интуиционистской логике, основывающейся на алгебре Гейтинга, то утверждение о том, что **Log** по своей природе является дополняющим топосом, позволяет развить параллель с хорошо известным результатом А. Тарского о том, что решетка всех элементарных теорий классической логики является брауэровой алгеброй.

1 Логические системы и пространства теорий

Опишем основной формализм, служащий фундаментом дальнейших исследований. Следуя [7, p. 101-103], рассмотрим логический язык, который свободно порожден некоторой сигнатурой, включающей в себя, как это обычно делается, конструкторы различной местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сигнатура представляет собой индексированное множество $\Sigma = \{\Sigma^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где каждое Σ^n является n-арным конструктором.

Будем считать, что множество пропозициональных переменных включено в Σ^0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Язык* над данной сигнатурой Σ, который будет обозначаться L_Σ, строится индуктивно обычным способом:

- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma$;
- *если* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\Sigma$ *и* $c \in \Sigma^n$, *то* $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L_\Sigma$.

Будем называть Σ-*формулами* элементы L_Σ, или просто *формулами*, когда Σ ясно из контекста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Логическая система* является парой $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где Σ есть сигнатура, а $\vdash$ представляет собой оператор присоединения следствий в L_Σ (в смысле Тарского, см. [23]), то есть, $\vdash\colon 2^{L_\Sigma} \to 2^{L_\Sigma}$ является функцией, обладающей следующими свойствами для каждых $\Gamma, \Phi \subseteq L_\Sigma$:

Экстенсивность: $\Gamma \subseteq \Gamma^{\vdash}$;

Монотонность: если $\Gamma \subseteq \Phi$, то $\Gamma^{\vdash} \subseteq \Phi^{\vdash}$;

Идемпотентность: $(\Gamma^{\vdash})^{\vdash} \subseteq \Gamma^{\vdash}$.

Здесь $\Gamma^{\vdash}$ есть множество следствий Γ. Для сохранения общности не будем требовать здесь и в дальнейшем, чтобы оператор присоединения следствий был финитным, и тем более структурным.

Поскольку нам потребуется принимать во внимание выразительную силу данной логической системы, нам придется ссылаться на ее логические связки (примитивные или производные). Будем считать раз и навсегда зафиксированным множество $\Xi = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ метапеременных. Для данной сигнатуры Σ и $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать множество L^k_Σ определенным индуктивно:

- $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \subseteq L^k_\Sigma$;
- $\Sigma^0 \subseteq L^k_\Sigma$;
- если $n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L^k_\Sigma$ и $c \in \Sigma^n$, то $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L^k_\Sigma$.

Очевидным образом $L_\Sigma = L^0_\Sigma$. Для данного $\varphi_n \in L^k_\Sigma$ будем записывать как $\varphi(\xi_1 \backslash \psi_1, \ldots, \xi_k \backslash \psi_k)$ формулу, получаемую из φ одновременной заменой каждого вхождения ξ_1 в φ на ψ_i для каждого $i \leq k$.

Производная связка местности $k \in \mathbb{N}$ является λ-термом $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$, где $\varphi \in L^k_\Sigma$. Обозначим через DC^k_Σ множество всех производных k-местных над Σ. Отметим, что если $c \in \Sigma^n$ является примитивной связкой, то она также может рассматриваться как производная связка $c = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для данной производной связки $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$ будем писать $d(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ вместо $\varphi(\xi_1 \backslash \psi_1, \ldots, \xi_k \backslash \psi_k)$.

Различные языки, порожденные различными сигнатурами, могут переводиться друг в друга с помощью понятия морфизма, когда примитивные связки одной сигнатуры отображаются в производные связки другой сигнатуры с сохранением соответствующей местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных сигнатур Σ_1 и Σ_2 *морфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является $\mathbb{N}$-индексированным семейством функций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to DC^n_{\Sigma_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Для данного морфизма сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ определяем его свободные расширения $h : L^k_{\Sigma_1} \to L^k_{\Sigma_2}$ для $k \in \mathbb{N}$, следующим образом:

- $h(\xi_i) = \xi_i$, если $\xi_i \in \Xi$;
- $h(c) = h^0(c)$, если $c \in \Sigma_1^0$;
- $h(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = h^0(c)(h(\varphi_1), \dots, h(\varphi_n))$, если $c \in \Sigma_1^n$.

Функцию перевода h, удовлетворяющую вышеизложенным требованиям, будем называть *унифицированной*.

Сигнатуры и их морфизмы образуют категорию **Sig** с тождествами $id_\Sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \Sigma^n$ $id^n_\Sigma(c) = \lambda \xi_1, \dots, \xi_k . c(\xi_1, \dots, \xi_k)$, а композиция морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ и $g : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будет определяться как $g \circ f : \Sigma_1 \to \Sigma_3$, такая, что $(g \circ f)^n(c) = \xi_1, \dots, \xi_n . g(\varphi)$, полагая, что $f^n(c) = \lambda \xi_1, \dots, \xi_n . \varphi$.

Удобство использования унифицированных переводов сказывается при формулировке понятия морфизма между логическими системами. Для данной функции $h : L_{\Sigma_1} \to L_{\Sigma_2}$ с $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$ мы будем рассматривать множество $h[\Phi] = \{h(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. *Морфизм логических систем* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ представляет собой морфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такой, что $h[\Phi^{\vdash_1}] \subseteq h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Логические системы и их морфизмы образуют конкретную категорию **Log** над **Sig**. Уместно напомнить следующую хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 6. *Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами, а $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ — **Log**-морфизмом. Тогда $h[\Phi^{\vdash_1}]^{\vdash_2} = h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.*

Теорией логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ является, как обычно, множество $\Phi \subseteq L_\Sigma$, такое, что $\Phi^\vdash = \Phi$. Обозначим как

$Th(\mathcal{L})$ множество всех теорий $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что множество $Th(\mathcal{L})$, упорядоченное по отношению включения, всегда является полной решеткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Пространство теорий* есть полная решетка $tsp = \langle Th, \leq \rangle$, то есть частичный порядок $\leq$ на множестве Th, такой, что каждое $T \subseteq Th$ имеет наименьшую верхнюю грань (или пересечение) $\bigvee T$.

В частности, для данной логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ структура $tsp_{\mathcal{L}} = \langle Th(\mathcal{L}), \subseteq \rangle$ всегда будет пространством теорий (см., напр., [11]). Более того, переводы языков, ассоциированные с морфизмами логических систем, всегда действуют на операторы присоединения следствий таким образом, что в соответствующих пространствах теорий сохраняются пересечения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий. *Морфизм пространств теорий* $h : tsp_1 \to tsp_2$ представляет собой функцию $h : Th_1 \to Th_2$ такую, что $h(\bigvee{}_1 T) = \bigvee{}_2 h[T]$ для каждого $T \subseteq Th$.

Следующая формулировка представляет собой хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 9. *Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий и $h : tsp_1 \to tsp_2$ будет морфизмом пространств теорий. Тогда h сохраняет порядок, то есть для каждого $\Phi, \Gamma \in Th_1$, если $\Phi \leq_1 \Gamma$, то $h(\Phi) \leq_2 h(\Gamma)$.*

Пространства теорий и их морфизмы образуют категорию **Tsp** с обычными тождествами и композицией функций. Более того, определение пространства теорий, индуцированного логической системой, может быть расширено на случай функтора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Отображения

- $Th(h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2) : tsp_1 \to tsp_2$, с $Th(h)(\Phi) = h[\Phi]^{\vdash_2}$ в $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ для каждого $\Phi \in Th(\mathcal{L}_1)$,

образуют функтор Th: **Log**→**Tsp**.

Нетрудно показать, что Th представляет собой сопряженный функтор, но этот факт нам здесь не понадобится.

2 Копроизведения и расслоения в Log

В [4, p. 153] указывается, что категория **Sig** является хорошо известной категорией $\mathbb{N}$-индексированных множеств и сохраняющих индексы отображений **Set**$/\mathbb{N}$. Как следствие, верно следующее предложение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Категория* ***Sig*** *является (малой) кополной категорией.*

В частности, в **Sig** имеются копроизведения и амальгамы. Первые позволяют нам объединить две сигнатуры с различными конструкторами, в то время как последние могут быть использованы для объединения конструкторов. Определим копроизведения, требуемый нам специальный случай конструкции амальгам и коуравнитель (с точностью до изморфизма) следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Копроизведение* двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 представляет собой сигнатуру $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, наделенную инъекциями $i_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ *является дизъюнктным объединением* Σ_1^k и Σ_2^k;
- i_1^k *и* i_2^k *являются инъекциями* Σ_1^k *и* Σ_2^k на $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ *соответственно.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Амальгама* двух инъективных морфизмов сигнатур с одним и тем же началом $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1$ и $f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ есть сигнатура $\Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, наделенная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ и $g_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ есть $\Sigma^k \cup i_1^k(\Sigma_1^k \backslash f_1(\Sigma^k)) \cup i_2^k(\Sigma_2^k \backslash f_2(\Sigma^k))$;
- $g_1^k(c_1) = \begin{cases} i_1^k(c_1), & \text{если } c_1 \notin f_1^k(\Sigma^k) \\ (f_1^k)^{-1}(c_1) & \text{в противном случае,} \end{cases}$

  и аналогично для g_2^k.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Коуравнителем* двух морфизмов сигнатур с одним и тем же началом и концом $f, g : \Sigma \to \Sigma_1$ является сигнатура $\Sigma_1/\equiv^{f,g}$, снабженная морфизмом $q:\Sigma_1\to\Sigma_1/\equiv^{f,g}$, таким, что

- $(\Sigma_1/\equiv^{f,g})^k$ *есть фактор-множество* $\Sigma_1^k(\equiv^{f,g})^k$, *где* $(\equiv^{f,g})^k$ *является наименьшим отношением эквивалентности на* Σ_1^k, *содержащим* $\{\langle f^k(c), g^k(c)\rangle : c\in\Sigma^k\}$;
- $q^k(c_1)$ *является* $(\equiv^{f,g})^k$*-классом эквивалентности для* $c_1\in\Sigma_1^k$.

Амальгамы существуют, если даже мы не предполагаем, что f_1 и f_2 являются инъекциями. Что касается коуравнителя, то каждый коуравнитель является, в сущности, семейством сюрьективных отображений. В дальнейшем оказывается полезным следующий факт: амальгама двух морфизмов $f_1:\Sigma\to\Sigma_1$ и $f_2:\Sigma\to\Sigma_2$ может быть получена путем построения вначале копроизведения $\Sigma_1\oplus\Sigma_2$, снабженного инъекциями $i_1:\Sigma_1\to\Sigma_1\oplus\Sigma_2$ и $i_2:\Sigma_2\to\Sigma_1\oplus\Sigma_2$, а затем конструированием коуравнителя $i_1\circ f_1$ и $i_2\circ f_2$.

Для рассмотрения неограниченных расслоений в **Log** мы используем конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что метапеременные играют важную роль в получении точной конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $\mathcal{L}_1=\langle\Sigma_1,\vdash_1\rangle$ и $\mathcal{L}_2=\langle\Sigma_2,\vdash_2\rangle$ будут логическими системами. Тогда их *неограниченным расслоением* является логическая система $\langle\Sigma_1,\vdash_1\rangle\oplus\langle\Sigma_2,\vdash_2\rangle=\langle\Sigma_1\oplus\Sigma_2,\vdash_{1\oplus2}\rangle$, где $\vdash_{1\oplus2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\oplus2}$: $2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}}\to 2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}}$ и i_1,i_2 являются инъекциями копроизведения $\Sigma_1\oplus\Sigma_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Неограниченные расслоения являются копроизведениями в* ***Log***.

Доказательство. 1) Инъекции i_1 и i_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5. 2) *Универсальность*. Пусть $h_1:\langle\Sigma_1,\vdash_1\rangle\to\langle\Sigma_3,\vdash_3\rangle, h_2:\langle\Sigma_2,\vdash_2\rangle\to\langle\Sigma_3,\vdash_3\rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k:\Sigma_1\oplus\Sigma_2\to\Sigma_3$ будет единственным морфизмом в **Sig**, таким, что $k\circ i_1=h_1$ и $k\circ i_2=h_2$. Тривиальным образом k является морфизмом в **Log** и он единственный такой, что $k\circ i_1=h_1$ и $k\circ i_2=h$. Q.E.D.

Когда надо совместно использовать (объединить) конструкторы, то расслоение ограничивается за счет введения какого-то взаимодействия между двумя логическими системами. Техника подъема морфизмов по кодекартовому квадрату снабжает нас средствами получения объединения, определенного на уровне сигнатур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1, f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их *ограниченным совмещенным расслоением* является

$$\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle),$$

где $q : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ является коуравнителем $i_1 \circ f_1 \colon \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 \circ f_2 \colon \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$.

Совмещение логических операторов отражается, в первую очередь, на синтаксисе расслоенной логики. Но поскольку допускается совмещение как пропозициональных символов, так и логических операторов, то совмещение логических операторов дает нам способ наложения ограничений путем постулирования взаимодействия между двумя логиками. Примеры (внося соответствующие изменения) можно найти в [20].

3 Произведения и индексирование в Log

Опять, поскольку категория **Sig** представляет собой хорошо известную категорию **Set**/$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$-индексированных множеств и сохраняющих индексирование отображений, то как следствие справедливым будет следующее предложение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Категория **Sig** является (малой) полной категорией.*

В частности, в **Sig** имеются произведения и обратные образы. Действуя дуально случаю копроизведений, определим произведения, специальный случай требуемых нам обратных образов и уравнитель (с точностью до изоморфизма) следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Произведение* двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 представляет собой сигнатуру $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженную проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ есть $\Sigma_1^k \times \Sigma_2^k$;
- pr_1^k и pr_2^k являются инъективными проекциями $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ в Σ_1^k и Σ_2^k соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Обратный образ* двух инъективных морфизмов сигнатур с одинаковым концом $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma$ и $f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ есть сигнатура $\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, снабженная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $g_2 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ *есть* $\{\langle pr_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle), pr_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) : f_1^k(c_1) = f_2^k(c_1)\}$
- $g_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_1, g_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *Уравнитель* двух сигнатур с одинаковым началом и концом $f, g : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является сигнатурой Σ, снабженной морфизмом $q : \Sigma \to \Sigma_1$, таким, что

- Σ^k *является множеством* $\{c \in \Sigma_1^k : f^k(c_1) = g^k(c_1)\}$;
- $f^k \circ q^k = g^k \circ q^k$.

Следующий факт пригодится в дальнейшем: обратный образ двух морфизмов $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma$ и $f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ может быть получен вначале построением произведения $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженного проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_2$, а затем получением уравнителя $f_1 \circ pr_1$ и $f_2 \circ pr_2$.

Рассмотрение неограниченного индексирования (*unconstrained labelling*) в **Log** (понятие индексированных дедуктивных систем см. в [17]) требует использования конструкторов и операторов присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что использование метапеременных необходимо для точности конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда их *неограниченное индексирование* представляет собой $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1 \otimes 2} \rangle$, где $\vdash_{1 \otimes 2}$ является оператором присоединения следствий $\vdash_{1 \otimes 2}$: $2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}} \to 2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}}$, а pr_1, pr_2 являются проекциями произведения $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. *Неограниченные индексирования являются произведениями в* ***Log***.

Доказательство. 1) Проекции pr_1 и pr_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5. 2) *Универсальность.* Пусть $h_1 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \to \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle, h_2 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \to \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k : \Sigma_3 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ будет единственным морфизмом в **Sig**, таким, что $pr_1 \circ k = h_1$ и $pr_2 \circ k = h_2$. Тривиальным образом k является морфизмом в **Log** и это единственный морфизм, такой, что $pr_1 \circ k = h_1$ и $pr_2 \circ k = h_2$. Q.E.D.

Если нам нужно отождествить конструкторы, то мы накладываем ограничение на индексирование с помощью введения взаимодействия между двумя данными логическими системами. Средствами получения отождествления на уровне сигнатур снабжает нас техника подъема морфизмов по декартовому квадрату.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma, f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ будет инъективным морфизмом сигнатур. Тогда их *ограниченным индексированием* является $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, где $q : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ является уравнителем $f_1 \circ pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$ и $f_2 \circ pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$.

Отождествление логических операторов прежде всего отражается на синтаксисе логики с индексированием. Но поскольку мы допускаем отождествление как пропозициональных символов, так и логических операторов, то отождествление логических операторов может снабдить нас способом формулировки некоторого взаимодействия между двумя логиками.

ПРИМЕР 25. *k-дедуктивные системы.*

2-мерная дедуктивная система (или 2-дедуктивная система для краткости) [11, p. 51] является логической системой $\langle \Sigma, \vdash^2 \rangle$, где $\Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_1$ и $\vdash^2$: $2^{L_{\Sigma_1 \times \Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1 \times \Sigma_1}}$ является оператором присоединения следствий, таким, что

- если $\langle \varphi, \psi \rangle \in \Pi$, то $\Pi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$,
- если для каждой $\langle \varphi, \psi \rangle \in \Phi, \Pi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$ и $\Phi \vdash^2 \langle \delta, \varepsilon \rangle$, то $\Pi \vdash^2 \langle \delta, \varepsilon \rangle$,
- если $\Phi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$ и $\Phi \subseteq \Pi$, то $\Pi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$.

Для каждого $k > 0$ k-дедуктивные системы или k-мерные дедуктивные системы определяются путем замены в определении 2-дедуктивной системы пар формул последовательностями формул длины k (k-последовательности) и производя другие очевидные изменения.

ПРИМЕР 26. Следуя общему рецепту для индексированной дедукции в [22] рассмотрим логические системы:

- $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$, где Σ_2^0 есть множество истинностных значений с выделенным значением $\top$, $\Sigma_2^1 = \{\Box^\circ\}$ и $\vdash_2$ соответствует $\leq$ (следовательно, $\beta \vdash_2 \top$, и мы будем писать $\beta_1 = \beta_2$ в том случае, когда $\beta_1 \vdash_2 \beta_2$ и $\beta_2 \vdash_2 \beta_1$);

- $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$, где Σ_1^0 является множеством пропозициональных переменных, $\Sigma_1^1 = \{\neg, \Box\}, \Sigma_1^2 = \{\supset, \wedge, \vee\}$ и $\vdash_1$ есть соответствующий фрагмент оператора присоединения следствий модальной логики.

Неограниченное индексирование $\mathcal{L}_1$ с помощью $\mathcal{L}_2$ получается в рамках системы $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1\otimes 2} \rangle$, где $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$–формулы имеют форму $\beta : \varphi$ (что означает, что истинное значение φ больше или равно β). $\vdash_{1\otimes 2}$: $2^{L_{pr_1(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\times pr_2(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)}} \longrightarrow 2^{L_{pr_1(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\times pr_2(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)}}$ является оператором присоединения следствий, таким, что (записываем $\beta :: \varphi$, если для каждого β_1 мы имеем $\beta_1 = \beta_2 : \varphi$):

- $\beta : \varphi \in \Pi$, тогда $\Pi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$,

- если для каждой $\beta : \varphi \in \Phi, \Pi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$ и $\Phi \vdash_{1\otimes 2} \delta : \psi$, то $\Pi \vdash_{1\otimes 2} \delta : \psi$,

- если $\Phi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$ и $\Phi \subseteq \Pi$, то $\Pi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$,

- если для каждой $\beta_1 : \varphi \in \Phi, \beta_1 : \varphi \vdash_{1\otimes 2} \beta_2 : \varphi$, то $\beta_2 : \varphi \in \Phi$,

- $\Box^\circ\beta :: \varphi \vdash_{1\otimes 2} \beta :: \varphi$,

- $\beta : \Box\varphi \vdash_{1\otimes 2} \Box^\circ\beta :: \varphi$.

Содержательно последние два случая означают, что формула $\Box\varphi$ истинна, по меньшей мере, во множестве миров β тогда и только тогда, когда формула φ истинна во всех мирах, достижимых для миров из β, что подразумевает $\Box^{\circ}\beta$.

4 Коэкспоненциалы и возможная переводимость в Log

Предлагаемый подход сталкивается с непреодолимыми трудностями, если попытаться определить экспоненцирование в **Log** обычным образом. Дело в том, что общепринятое понимание экспоненциала A^B как множества всех отображений из B в A (по крайней мере в **Set**) в нашем случае приводит к «логике» всех переводов из одной логической системы в другую. Однако трудно сказать что-либо определенное о такой конструкции или понятии. Поэтому нам следует либо отказаться от продолжения исследования, либо сменить направление рассмотрения.

Выход заключается в использовании дуальных понятий. Мы говорим, что категория допускает *коэкспоненцирование*, если в ней существует копроизведение любых двух объектов и для двух произвольных объектов a, b всегда имеется объект ${}^{a}b$, называемый *коэкспоненциалом*, и стрелка $ev^{\circ} : b \to {}^{a}b + a$ (*кооценка*), такая, что для любого объекта c и стрелки $g : b \to c + a$ существует стрелка $\breve{g} : {}^{a}b \to c$, такая, что $(\breve{g} + id_a) \circ ev^{\circ} = g$.

Как пример категории с экспоненцированием обычно рассматривают алгебру Гейтинга, взятую категорно (то есть как категорию предпорядка с произведениями и копроизведениями), где экспоненциалом будет импликация Гейтинга, являющаяся псевдодополнением a относительно b (см. [1]). В качестве примера категории с коэкспоненцированием в этом случае можно рассматривать алгебру Брауэра, где в роли коэкспоненциала выступает брауэровская импликация $a \Longleftarrow b$, являющаяся псевдоразностью b и a (см., например, [2]). Наконец, примером категории с экспоненцированием и коэкспоненцированием будет так называемая алгебра Гейтинга—Брауэра, представляющая собой алгебру Гейтинга, пополненную брауэровской импликацией (см. [18]).

Конечно, в категории **Set** конструкция коэкспоненциала будет выглядеть гораздо более сложной, например, мы можем использовать с этой целью так называемые *антифункции* (согласно [16] антифункция $g^{\perp} : X \to Y$ является бинарным отношением между X и Y, чьим обратным отношением будет функция $g : Y \to X$). Вообще, если мы можем с каждым переводом из одной логической системы в другую связать отношение (антифункцию), то это дает нам возможность рассмотреть конструкцию коэкспоненциала. А в случае, когда антифункция является обратной функцией (если принять во внимание, что функции представляют собой частный случай отношений), конструкция коэкспоненциала превращается в конструкцию, полученную с помощью обратных функций.

Техника *семантики возможной переводимости* (см. [9]) подсказывает нам конструкцию коэкспоненциала в **Log**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. *Коэкспоненциалом* двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 является сигнатура ${}^{\Sigma_2}\Sigma_1$ с функцией кооценки $ev^{\circ} : \Sigma_1 \to {}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus$ $\oplus \Sigma_2$ такой, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $({}^{\Sigma_2}\Sigma_1)^k$ *есть множество* $O = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *реляционных бинарных операторов и язык реляционных формул* L_O *представляет собой множество* $o(c_2, c_1)$ *для всех* $o \in O$ *и* $c_1 \in \Sigma_1^k, c_2 \in \Sigma_1^k$;
- $(ev^{\circ})^k$ *является биекцией, причем* $(ev^{\circ})^k(c_1) = o(c_2, c_1)$ *или* $(ev^{\circ})^k(c_1) = c_2$ *в противном случае (где* $o \in O$ $, c_1 \in \Sigma_1^k, c_2 \in \Sigma_1^k$*).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. *Коэкспоненцированием* морфизма сигнатур $g : \Sigma_1 \to \Sigma_3 \oplus \Sigma_2$ является сигнатура ${}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ с морфизмом $\breve{g} : {}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \to \Sigma_3$, таким, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\breve{g} + id_{\Sigma_2}) \circ ev^{\circ} = g$;
- $g^k(c_1) = \begin{cases} (ev^{\circ})^k(c_1), & \text{если} (ev^{\circ})^k(c_1) \in \Sigma_2^k \\ \breve{g}((ev^{\circ})^k(c_1)) & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Чтобы рассмотреть *возможную переводимость* в **Log**, нам требуются конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Вновь существенным является использование метапеременных, позволяющее сделать конструкцию точной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда *возможной переводимостью* из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ будет $\langle^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{(1,2)} \rangle$, где $\vdash_{(1,2)}$ означает $\vdash_{(1,2)}$: $2^{L_{ev^\circ(\Sigma_1) \cup^{\Sigma_2}\Sigma_1}} \longrightarrow 2^{L_{ev^\circ(\Sigma_1) \cup^{\Sigma_2}\Sigma_1}}$ и ev° есть морфизм кооценки в **Sig**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 30. *Возможные переводимости являются коэкспоненциалами в **Log**.*

Доказательство. 1) Кооценка является логическим морфизмом в **Log** согласно определению 5. 2) *Универсальность*. Пусть $g : \Sigma_1 \to \Sigma_3 \oplus \Sigma_2$ будут морфизмами в **Log**. Пусть $\breve{g} : {}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \to \Sigma_3$ будет единственным морфизмом в **Sig**, таким, что $(\breve{g} + id_{\Sigma_2}) \circ ev^\circ = g$. Тривиальным образом $\breve{g}$ является таким единственным морфизмом в **Log**, что $(\breve{g} + id_{\Sigma_2}) \circ ev^\circ = g$. Q.E.D.

Мы можем улучшить и уточнить перевод, налагая ограничения на свободные расширения морфизмов между двумя данными логическими системами.

ПРИМЕР 31. Возможная переводимость трехзначной логики $\mathbf{P}^1$ *в классическую логику.*

Рассмотрим логические системы (см. [9]):

- $\mathbf{L}_3 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ (трехзначное паранепротиворечивое исчисление $\mathbf{P}^1$), где Σ_1^0 есть множество пропозициональных переменных, $\Sigma_1^1 = \{\neg_3\}, \Sigma_1^2 = \{\supset_3, \wedge_3, \vee_3\}$ и $\vdash_1$ является оператором присоединения следствий трехзначной логики $\mathbf{P}^1$;
- $\mathbf{L}_{PC} = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ (классическая логика), где Σ_2^0 есть множество пропозициональных переменных, $\Sigma_2^1 = \{\neg\}, \Sigma_2^2 = \{\supset, \wedge, \vee\}$ и $\vdash_2$ является оператором присоединения следствий классической логики.

Перевод $g : \mathbf{L}_3 \to \mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{L}_{PC}$ можно было бы определить в части, касающейся Σ_2, как $g(\neg_3) = \neg$, $g(\supset_3) = \supset, g(\wedge_3) = \wedge$, $g(\vee_3) = \vee$. Свободное расширение морфизма $g : \Sigma_1 \to \Sigma_3 \oplus \Sigma_2$ определяется следующими условиями:

- $g(p) = p$ для атомарного p,
- $g(\neg_3 \varphi) = \neg g(\varphi)$ для неатомарной φ,

- $g(\varphi \supset_3 \psi) = g(\varphi) \supset g(\psi)$.

Свободная переводимость $\mathbf{L}_3$ в $\mathbf{L}_{PC}$ есть экспоненциал $\langle^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{(1,2)}\rangle$ и мы определяем

- $\breve{g}(o_1(\varphi, p)), \breve{g}(o_2(\psi, p)), g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} p$ в случае, если $\breve{g}(o_1(\varphi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} p$ или $\breve{g}(o_2(\psi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} p$ (для атомарного p),

- $\breve{g}(o_1(\varphi, p)), \breve{g}(o_2(\psi, p)), g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3 p)$ если $\breve{g}(o_1(\varphi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3 p)$ или $\breve{g}(o_2(\psi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3 p)$ (для атомарного p),

- $\breve{g}(o_1(\sigma, \neg_3\varphi)), \breve{g}(o_2(\psi, \neg_3\varphi)), g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3\varphi)$ тогда и только тогда, когда $\breve{g}(o_1(\sigma, \neg_3\varphi)), \breve{g}(o_2(\psi, \neg_3\varphi))$, $g[\Gamma] \nvdash_{3\otimes 2} g(\varphi)$ (для неатомарной φ),

- $\breve{g}(o_1(\sigma, \varphi \supset_3 \psi))$, $\breve{g}(o_2(\tau, \varphi \supset_3 \psi))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\varphi \supset_3 \psi)$ тогда и только тогда, когда $\breve{g}(o_1(\sigma, \varphi \supset_3 \psi))$, $\breve{g}(o_2(\tau, \varphi \supset_3 \psi))$, $g[\Gamma] \nvdash_{3\otimes 2} g(\varphi)$ или $\breve{g}(o_1(\sigma, \varphi \supset_3 \psi))$, $\breve{g}(o_2(\tau, \varphi \supset_3 \psi))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\psi)$ (для любых φ и ψ).

Очевидным образом подобные условия дают нам синтаксическую версию семантики возможной переводимости из [9], если мы определим $\Gamma \vdash_1^* A$ тогда и только тогда, когда $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(B)$ для всех переводов g.

5 Log как дополняющий топос

На основании предыдущего рассмотрения мы можем прийти к выводу, что **Log** является по крайней мере биполной категорией (в качестве терминального объекта мы можем рассматривать логическую систему $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где $\Sigma_1^0 = \{\top\}$ и $\Sigma_1^k = \varnothing$ для $k > 0$, а $\vdash$ является таким, что $\varnothing^{\vdash} = \{\top\}$, в то время как за начальный объект принимается пустая сигнатура). Единственной проблемой является то обстоятельство, что в отличие от **Set** мы получаем не декартову замкнутость (поскольку **Log** не допускает экспоненцирования), но лишь кодекартову замкнутость. Конечно мы можем получить экспоненциал, строя его из тех отношений из конструкции коэкспоненциала, которые являются функциональными отношениями (с соответствующей дуализацией морфизмов). Но в этом случае экспоненциал оказывается частичной конструкцией — ситуация, сразу же отличающаяся от обычного категорного способа рассмотрения.

Тем не менее это еще не окончательный результат, несмотря на то что декартова козамкнутость **Log**, по-видимому, закрывает дорогу для дальнейшего продвижения в нужном нам направлении. На первый взгляд кажется, что нет ни малейшей возможности получить структуру топоса в **Log**, поскольку, согласно определению топоса, последний представляет собой декартово *замкнутую* категорию с классификатором подобъектов.

Но здесь на помощь приходит интересный факт, касающийся классификатора подобъектов: К.Мортенсен в [15] ввел понятие *дополняющего* классификатора как инструмента рассмотрения паранепротиворечивости в теории топосов. Его определение выглядит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. В категории $\mathcal{C}$ *дополняющий классификатор* является $\mathcal{C}$-стрелкой $false : 1 \to \Omega$, где для любой мострелки $f : a \rightarrowtail b$ имеется одна и только одна $\mathcal{C}$-стрелка $b \to \Omega$, обозначаемая $\bar{\chi}_f$, превращающая следующую диаграмму в амальгамирование в $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & b \arrow[d, "\bar{\chi}_f"] \\ 1 \arrow[r, "false"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Мортенсен показал, что дополняющий классификатор в топосе **Set** неотличим (с помощью теоретико-категорных методов) от стандартного классификатора подобъектов, что они изоморфны. Таким образом, в **Set** всегда присутствует паранепротиворечивость ввиду наличия обоих типов классификаторов подобъектов. Более того, справедливо следующее предложение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 33. *Дополняющие топосы отвечают паранепротиворечивой логике, основывающейся на брауэровой алгебре, аналогично тому как топосы отвечают интуционистской логике, основывающейся на алгебре Гейтинга.*

Поскольку топосы отвечают интуиционистской логике, отражая структуру алгебры Гейтинга в строении классификатора подобъектов, то в дополняющем топосе дополняющий классификатор отражает соответственно структуру брауэровой алгебры. Отсюда нам требуется как раз дополняющий классификатор, а поскольку **Log** не является декартово замкнутой категорией, то, собственно говоря, присутствие обычного классификатора подобъектов необязательно. Иными словами, **Log** должна быть лишь дополняющим топосом, что подразумевает декартово козамкнутую категорию с дополняющим классификатором. Как следствие нам нужно рассмотреть только диаграмму дополняющего классификатора Мортенсена.

УТВЕРЖДЕНИЕ 34. ***Log*** *является дополняющим топосом.*

Доказательство. Определим $\Omega = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где $\Sigma_1^0 = \{\top, \bot\}, \Sigma_1^1 = \{\neg\}, \Sigma_1^2 = \{\Longleftarrow, \wedge, \vee\}$, а $\vdash$ соответствует $\leq$ в брауэровой алгебре (в частности, $\varnothing^{\vdash} = \{\bot\}$). Поскольку $1 = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где $\Sigma_1^0 = \{\top\}$ и $\Sigma_1^k = \varnothing$ для $k > 0$, а $\vdash$ таков, что $\varnothing^{\vdash} = \{\top\}$, то $false(\top) = \bot$. Остальное очевидно. Q.E.D.

Выражаясь более точно, **Log** будет *паранепротиворечивым дополняющим топосом.* Фактически эта глобальная структура накладывается на универсум универсальной логики, если мы в качестве последней подразумеваем общую теорию логических систем. И конечно же, полученная структура не исчерпывает всех возможностей дальнейшего анализа, окончательно закрывая тему исследования.

Литература

[1] *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М.: 1983.

[2] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: 1972.

[3] *Armando A.* (ed.). Frontiers of combining systems. Lecture Notes in Computer Science, V. 2309 Berlin, 2002.

[4] *Baader F. and Schulz K. U.* (eds.). Frontiers of combining systems, Applied Logic Series. V. 3. Dordrecht, 1996 (Papers from the First International Workshop (FroCoS'96) held in Munich, March 26-29, 1996)

[5] *Béziau J.-Y., de Freitas R.P., VianaJ.P.* What is Classical Propositional Logic? (A Study in Universal Logic) // Logical Investigations, V. 8, 2001. P. 266-277.

[6] *Béziau J.-Y.* From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic // Logica Universalis. *J.-Y. Béziau* (ed.). Basel, 2005. P. 3-18.

[7] *Caleiro C., Gonçalves R.* Equipollent Logical Systems // Logica Universalis. J.-Y. Béziau (ed.). Basel, 2005. P. 99-111.

[8] *Caleiro C., Carnielli W.A., Coniglio M. E., Sernadas A., and Sernadas C.* Fibring non-truth-functional logics: Completeness preservation // Journal of Logic, Language and Information. V. 12 № 2. 2003. P. 183–211.

[9] *Carnielli W.* Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics // Frontiers of Paraconsistent Logic / D. Batens et al (eds.). Baldock, Herfordshire, 2000. P.149-163.

[10] *Coniglio M.E., Sernadas A., and SernadasC.* Fibring logics with topos semantics // Journal of Logic and Computation. V. 13. № 4. 2003. P. 595–624.

[11] *Font J.M., Jansana R., Pigozzi D.* A Survey of Abstract Algebraic Logic // Studia Logica. Vol. 74, No 1/2, 2003. P. 13-97.

[12] *Gabbay D.* Fibred semantics and the weaving of logics: part 1 // Journal of Symbolic Logic. V. 61. № 4. 1996. P. 1057–1120.

[13] *Gabbay D. and Pirri F.* (eds.). Special issue on combining logics // Studia Logica, V. 59. № 1,2. 1997.

[14] *Kirchner H. and Ringeissen C.* (eds.). Frontiers of combining systems. Lecture Notes in Computer Science. V. 1794. Berlin, 2000.

[15] *Mortensen C.* Inconsistent Mathematics. Dordrecht, 1995.

[16] *Pratt V.R.* Rational Mechanics and Natural Mathematics // Proc. TAPSOFT'95, LNCS V. 915. Aarhus, Denmark, May 1995. P. 108–122.

[17] *Rasga J., Sernadas A., Sernadas C. and Viganò L.* Fibring labelled deduction systems // Journal of Logic and Computation. V. 12. № 3. 2002. P. 443–473.

[18] *Rauszer C.* A Formalization of the Propositional Calculus of H-B-logic // Studia Logica. V. 33. № 1. 1973. P. 23-34.

[19] *de Rijke M. and Blackburn P.* (eds.). Special issue on combining logics // Notre Dame Journal of Formal Logic, V. 37. № 2. 1996.

[20] *Sernadas A., Sernadas C., Caleiro C.* Fibring of Logics as a Categorial Construction // Journal of Logic and Computation. V. 9. № 2. 1999. P. 149–179.

[21] *Sernadas C., Rasga J., and Carnielli W.A.* Modulated fibring and the collapsing problem // Journal of Symbolic Logic. V. 67. № 4. 2002. P. 1541–1569.

[22] *Sernadas C., Viganò L., Rasga J., and Sernadas A.* Truth-values as labels: A general recipe for labelled deduction // Journal of Applied Non-Classical Logics. V. 13. № 3-4. 2003. P. 277–315.

[23] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi. Synthese Library. Vl. 199. Dordrecht, 1988.